

1º a) b) Teoría.

c) 1) $R = \{(1,1), (1,2), (3,1)\}$

R no es función ya que $2 \notin \text{dom}(R)$.

2) No es posible, ya que una función de A , que tiene 3 elementos, en B , que tiene 2, no puede ser inyectiva.

3) $f_2 = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$

No es inyectiva porque $f_2(1) = f_2(2) = 1$.

No es suprayectiva porque $2 \notin \text{Im}(f_2)$

4) No es posible, mismo motivo que 2)

5) $f_4 = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$

f_4 no es inyectiva porque $f_4(1) = f_4(2) = 1$.

f_4 es suprayectiva porque $\text{Im}(f_4) = B$.

d) 1) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

No es función porque $4 \notin \text{dom}(R)$

2) $f_1(n) := 2n \quad \forall n \in A$

Es inyectiva porque si $n_1 \neq n_2 \Rightarrow 2n_1 \neq 2n_2$.

Es suprayectiva porque dado $y \in B$ cualquiera, se cumple que $f_1\left(\frac{y}{2}\right) = y$.

3) $f_2(n) := 2 \quad \forall n \in A$

No es inyectiva porque $f_2(1) = f_2(2) = 2$

No es suprayectiva porque $\text{Im } f_2 = \{2\} \neq B$

$$4) f_3(n) := 4n \quad \forall n \in A$$

Es inyectiva porque $n_1 \neq n_2 \Rightarrow 4n_1 \neq 4n_2$

No es suprayectiva porque $\text{im } f_3 = \{\text{múltiplos de } 4\}$

$$5) f_4(1) := 2$$

$$f_4(2) := 2$$

$$f_4(n) := ~~2n-2~~ 2n-2 \quad \forall n \geq 3$$

es decir

$$1 \mapsto 2$$

$$2 \mapsto 2$$

$$3 \mapsto 4$$

$$4 \mapsto 6$$

$$5 \mapsto 8$$

$\vdots$

f_4 es suprayectiva porque todos los números pares son imagen de algún elemento de A .

f_4 no es inyectiva porque $f_4(1) = f_4(2) = 2$

2°

(a) FALSA

CONTRAJECCION $\varphi_1 = p \wedge q$

$$\varphi_2 = p$$

$$\varphi_3 = q$$

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \quad \varphi_2 \\ \varphi_1 \quad p \wedge q \models p = \varphi_2 \\ \varphi_1 \quad p \wedge q \models q = \varphi_3 \\ \text{Pero } p \neq q \\ \varphi_2 \quad \varphi_3 \end{array}$$

(b) VERDADERA

$\varphi_1 \models \varphi_2$ quiere decir que $\forall$ valoración

$$\varphi_1^v = 1 \Rightarrow \varphi_2^v = 1.$$

$\varphi_2 \models \varphi_3$ quiere decir que $\forall$ valoración

$$\varphi_2^v = 1 \Rightarrow \varphi_3^v = 1.$$

luego $\forall$ valoración $\varphi_1^v = 1 \Rightarrow \varphi_3^v = 1$,
es decir $\varphi_1 \models \varphi_3$

(c) FALSA

CONTRAJECCION $\varphi_1 = p \vee q$

$$\varphi_2 = p$$

$$\varphi_3 = q$$

$$\varphi_1 \models \varphi_2 \vee \varphi_3$$

Pero

$$\varphi_1 \neq \varphi_2$$

(d) VERDADERA

Por reducción al absurdo si $\varphi_2 \neq \varphi_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ valoración tal que $\varphi_2^v = 1$ y $\varphi_1^v = 0$.

Pero entonces $(\varphi_2 \vee \varphi_3)^v = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1 \neq \varphi_2 \vee \varphi_3$ ¡! contradicción.

luego $\varphi_2 \models \varphi_1$

2º CONTINUACIÓN

$$\Phi_1 = (p \wedge q) \vee r \equiv \neg r \rightarrow (p \wedge q) \equiv$$

$$\equiv \neg(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \neg p \vee \neg q \rightarrow r \equiv \Phi_2$$

Por tanto $\Phi_1 \equiv \Phi_2$. Sólo hace falta estudiar la relación de una de ellas con Φ_3 . Por ejemplo con una tabla de verdad:

p	q	r	$p \wedge q$	Φ_1	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	Φ_3
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

Se puede ver que todo modelo de Φ_1 lo es también de Φ_3 . Por lo que $\Phi_1 \models \Phi_3$. Sin embargo Φ_3 es modelo de Φ_3 y no de Φ_1 .

p:0, q:1, r:0

Por tanto $\Phi_3 \not\models \Phi_1$. Como $\Phi_1 \equiv \Phi_2$ tenemos que:

- $\Phi_1 \models \Phi_2$
- $\Phi_2 \models \Phi_1$
- $\Phi_1 \models \Phi_3$
- $\Phi_2 \models \Phi_3$
- $\Phi_3 \not\models \Phi_1$
- $\Phi_3 \not\models \Phi_2$

④

1. $p \rightarrow q \wedge r$ Pr.
2. $r \rightarrow t \vee \neg q$ Pr.
3. $t \rightarrow \neg r$ Pr.

4. p	Pr. aux.
5. $q \wedge r$	$E \rightarrow, 1$
6. q	$E \wedge, 5$
7. r	$E \wedge, 5$
8. $t \vee \neg q$	$E \rightarrow, 2$
9. t	$T \vee, 6, 8$
10. $\neg r$	$E \rightarrow, 3, 9$
11. $r \wedge \neg r$	$I \wedge, 7, 10$

12. $p \rightarrow r \wedge \neg r$ $I \rightarrow (4-11)$
13. $\neg p$ $I \neg, 12$

③

1. $u \rightarrow p$ Pr.
2. $p \rightarrow q \wedge r$ Pr.

3. u	Pr. aux.
4. p	$E \rightarrow, 1, 3$
5. $q \wedge r$	$E \rightarrow, 2, 4$
6. q	$E \wedge, 5$

7. $u \rightarrow q$ $I \rightarrow (3-6)$

8. p	Pr. aux.
9. $q \wedge r$	$E \rightarrow, 8, 2$
10. r	$E \wedge, 9$
11. $r \vee u$	$I \vee, 10$

12. $p \rightarrow r \vee u$ $I \rightarrow (8-11)$
13. $(u \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r \vee u)$ $I \wedge, 7, 12$

5- Para términos

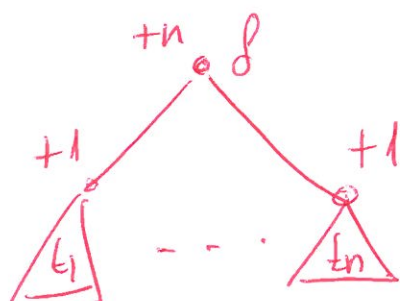
ATÓMICOS: Si t es atómico $\Rightarrow G(t) := 0$

(porque el árbol de t no tiene aristas).

COMPUESTOS:

Si f es función de aridad n
 $t_1, \dots, t_n$ términos $\Rightarrow G(f(t_1, \dots, t_n)) := \sum_{i=1}^n G(t_i) + 2n$

(entran n nuevas aristas y cada una aumenta el grado total en 2):



Para fórmulas

ATÓMICAS: ~~$G(t_1) \neq G(t_2) \neq G(t_3) \neq G(t_4) \neq G(t_5)$~~
 (porque sus árboles no tienen aristas):

(p símbolo de prop. atómica)

$$F(T) = F(\perp) = F(p) := 0.$$

P predicado de aridad n
 $t_1, \dots, t_n$ términos $\Rightarrow F(P(t_1, \dots, t_n)) := \sum_{i=1}^n G(t_i) + 2n$

$$F(t_1 = t_2) := G(t_1) + G(t_2) + 4$$

(cada nueva arista aumenta el grado total en 2).

COMPUESTAS:

ϕ, ψ fórmulas, $\circ$ conectiva binaria, K cuantificador,
 x variable:

$$F(\neg \phi) := F(\phi) + 2$$

$$F(\phi \circ \psi) := F(\phi) + F(\psi) + 4.$$

$$F(Kx\phi) := F(\phi) + 4$$

(cada nueva cuísta aumenta el grado total en 2)

- 6.º
- a) $P^{\bar{I}2} = D \times D$
Con esta interpretación $P(x,y) = 1$ para valores cualesquiera de x e y , por tanto todas las fórmulas son verdaderas.
- b) $P^{\bar{I}2} = \{(a,a)\}$
 $A^{\bar{I}2} = 1$ con $x=y=a$ como ejemplo.
 $B^{\bar{I}2} = 0$ con $x=b$ como contraejemplo, ya que $\exists y P(b,y)$ es falsa.
 $C^{\bar{I}2} = 0$ porque sea quien sea y $\forall x P(x,y)$ es falsa ya que $x=b$ será un contraejemplo.
- c) $P^{\bar{I}3} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$.
 $A^{\bar{I}3} = 1$ con $x=y=a$ como ejemplo.
 $B^{\bar{I}3} = 1$ porque dado x cualquiera $y=x$ es un ejemplo.

$C^{\exists} = 0$ porque dada un y cualquiera siempre se puede elegir $x \in D$ $x \neq y$ como contraejemplo.

7.º $D = \{ \text{seres vivos} \}$

$M(x)$: x es mortal

$H(x)$: x es hombre.

$E(x)$: x es egoísta

$C(x)$: x es cruel.

a : Sócrates.

$\forall x (H(x) \rightarrow M(x))$

$\forall x (M(x) \rightarrow E(x))$

$\forall x (E(x) \rightarrow C(x))$

$H(a)$

$\forall x (H(x) \rightarrow C(x)) \wedge E(a) \wedge \exists x (H(x) \wedge M(x))$

1. $\forall x (H(x) \rightarrow M(x))$ Pr
2. $\forall x (M(x) \rightarrow E(x))$ Pr
3. $\forall x (E(x) \rightarrow C(x))$ Pr
4. $H(a)$ Pr
5. $H(a) \rightarrow M(a)$ $E\forall, 1 (x=a)$
6. $M(a) \rightarrow E(a)$ $E\forall, 2 (x=a)$
7. $M(a)$ $E\rightarrow 4, 5$
8. $E(a)$ $E\rightarrow, 7, 6$
9. $H(a) \wedge M(a)$ $I\wedge, 4, 7.$
10. $\exists x (H(x) \wedge M(x))$ $I\exists, 9.$

11. y variable libre.

12. $H(y)$ Pr. aux.
13. $H(y) \rightarrow M(y)$ $E\forall, 1 (x=y)$
14. $M(y) \rightarrow E(y)$ $E\forall, 2 (x=y)$
15. $E(y) \rightarrow C(y)$ $E\forall, 3 (x=y)$
16. $M(y)$ $E\rightarrow, 12, 13$
17. $E(y)$ $E\rightarrow, 16, 14.$
18. $C(y)$ $E\rightarrow, 17, 15$

19. $H(y) \rightarrow C(y)$ $\rightarrow I (12-18)$

20. $\forall x (H(x) \rightarrow C(x))$ $I\forall (11-19)$
 21. $\forall x (H(x) \rightarrow C(x)) \wedge E(a)$ $I\wedge, 20, 8$
 22. $\forall x (H(x) \rightarrow C(x)) \wedge E(a) \wedge \exists x (H(x) \wedge M(x))$
- $I\wedge, 21, 10$